ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
HỆ THPT CHUYÊN NĂM 2011

MÔN THI: TOÁN (Vòng 1)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}(x-1)y^2+(x-1)=2-y\\(y-2)x^2+(y-2)=x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y^2+1)=2-y \quad (1)\\(y-2)(x^2+1)=x-1 \quad (2)\end{cases}$$

+) Nếu $x>1$ suy ra $(x-1)(y^2+1)>0$ nên từ $(1)\Rightarrow 2-y>0\Rightarrow y<2\Rightarrow(y-2)(x^2+1)<0$ do đó từ $(2)\Rightarrow x-1<0\Rightarrow x<1$ mâu thuẫn.

+) Nếu $x<1$, tương tự suy ra $x>1$ mâu thuẫn.

+) Nếu $x=1\Rightarrow y=2$ (thỏa mãn).

Đáp số $x=1, y=2$.

2) Điều kiện $x>0$. Phương trình tương đương:

$$2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7.$$

Chia hai vế cho $x\neq 0$ ta thu được:

$$2(1+\frac{1}{x})\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}\Leftrightarrow(x+\frac{3}{x})-2(1+\frac{1}{x})\sqrt{x+\frac{3}{x}}+\frac{4}{x}=0\Leftrightarrow(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2)\ (\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x})=0$$

+) Giải $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=2\Leftrightarrow x+\frac{3}{x}=4\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

+) Giải $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{2}{x}\Leftrightarrow x+\frac{3}{x}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x^3+3x-4=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x+4)=0\Leftrightarrow x=1$.

Đáp số $x=1, x=3$.

Câu II. 1) Giả sử tồn tại các số nguyên x, y, z thỏa mãn:

$x^4+y^4=7z^4+5\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4=8z^4+5$ (1).

Ta có $a^4\equiv 0,1 \pmod 8$ với mọi số nguyên a

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0,1,2,3 \pmod{8} \\ 8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

Mâu thuẫn với (1). Vậy không tồn tại (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức.

2) Phương trình tương đương với:

$$\left[(x+1)^2 + (x-1)^2\right]\left[(x+1)^2 - (x-1)^2\right] = y^3 \Leftrightarrow (2x^2+2)(4x) = y^3 \Leftrightarrow 8x^3 + 8x = y^3.$$

+) Nếu $x \ge 1 \Rightarrow 8x^3 < 8x^3 + 8x < (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ (mâu thuẫn vì y nguyên).

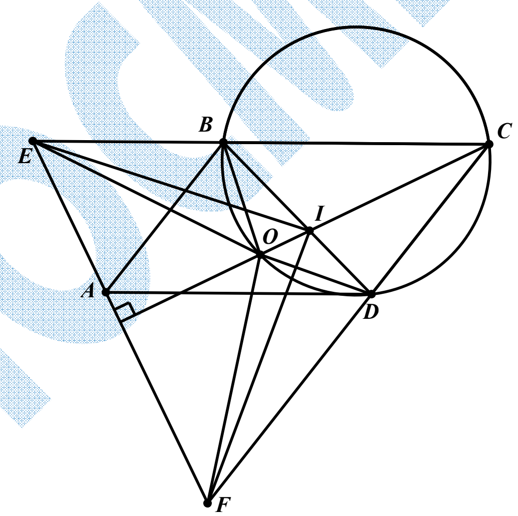
+) Nếu $x \le -1$ và (x, y) là nghiệm, ta suy ra $(-x, -y)$ cũng là nghiệm, mà $-x \ge 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn.

+) Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $x = y = 0$ là nghiệm duy nhất.

Câu III

1) Tứ giác $OBCD$ nội tiếp và CO là phân giác góc $\widehat{BCD}$ $\Rightarrow \widehat{OBD} = \widehat{OCD} = \widehat{OCB} = \widehat{ODB} \Rightarrow \Delta OBD$ cân tại $O \Rightarrow OB = OD$ (1). Tứ giác $OBCD$ nội tiếp $\widehat{ODC} = \widehat{OBE}$ (2) (cùng bù với góc $\widehat{OBC}$). Trong ΔCEF có CO vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên ΔCEF cân tại C. Do $AB \parallel CF \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = \widehat{EAB} \Rightarrow \Delta ABE$ cân tại $B \Rightarrow BE = BA = CD$ (3). Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $\Delta OBE = \Delta ODC (c-g-c)$ (đpcm).



2) Từ câu 1) $\Delta OBE = \Delta ODC$ suy ra $OE = OC$. Mà CO là đường cao tam giác cân $CEF \Rightarrow OE = OF$. Từ đó $OE = OC = OF$ vậy O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔCEF (đpcm).

3) Theo $(3) \Rightarrow BE = CD$ mà $CE = CF \Rightarrow BC = DF$. Ta có CI là đường phân giác

góc $\widehat{BCD} \Rightarrow \dfrac{IB}{ID} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{DF}{BE} \Rightarrow IB.BE = ID.DF$.

Mà CO là trung trực EF và $I \in CO \Rightarrow IE = IF$.

Từ hai đẳng thức trên suy ra $IB.BE.EI = ID.DF.FI$ (đpcm).

Câu IV. Ta chứng minh

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}} \geq \frac{x^2}{x^2+2y^2} \ (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^3+8y^3} \geq \frac{x^4}{(x^2+2y^2)^2} \Leftrightarrow (x^2+2y^2)^2 \geq x(x^3+8y^3) \Leftrightarrow 4x^2y^2+4y^4 \geq 8xy^3$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$ (đúng).

Ta chứng minh $\sqrt{\dfrac{y^3}{y^3+(x+y)^3}} \geq \dfrac{y^2}{x^2+2y^2}$ (2)

$$\Leftrightarrow \frac{y^3}{y^3+(x+y)^3} \geq \frac{y^4}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2y^2) \geq y(y^3+(x+y)^3) \Leftrightarrow (x^2+2y^2)^2 - y^4 \geq y(x+y)^3 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq y(x+y)^3$$

Ta có

$$x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$$

$$x^2+3y^2 = x^2+y^2+2y^2 \geq 2xy+2y^2 = 2y(x+y) \Rightarrow (x^2+y^2)(x^2+3y^2) \geq \frac{1}{2}(x+y)^2.2y(x+y) = y(x+y)^3$$

$\Rightarrow (2)$ đúng.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P \geq 1$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$. Vậy $P_{\min} = 1$.

Nguồn: Hocmai.vn